Devoir sur Table 4

Durée : 4h

1. Les exercices sont indépendants. Ils peuvent être traités dans un ordre quelconque.
2. Tous les documents sur papier sont interdits.
3. Les calculatrices ne sont pas autorisées.
4. Le matériel de géométrie (règle, compas, équerre) est autorisé.
5. La notation des copies tiendra compte dans une large mesure de la qualité de la rédaction. Ceci implique que vous devez faire des raisonnements clairs, concis et complets, utiliser un langage mathématiques adapté et précis, être lisible et éviter les fautes d'orthographe et de grammaire.
6. Si, au cours du devoir, vous repérez ce qui vous semble être une erreur d'énoncé, vous le signalez sur votre copie et poursuivez sa composition en expliquant les raisons des initiatives que vous avez été amené à prendre.
7. Mettez en évidence vos résultats en les encadrant.
8. Conformément au règlement de la Banque PT
   — Composer lisiblement sur les copies avec un stylo à bille à encre foncée : bleue ou noire.
   — L'usage de liquide de correction et dérouleur de ruban correcteur est interdit.

Le soin apporté à la copie fera l'objet d'une évaluation suivant les critères suivants :
— Mise en évidence des résultats
— Soin et lisibilité de la copie. En particulier les traits, y compris pour les ratures, devront être tracés à l'aide d'une règle
— Respect des consignes concernant le liquide de correction et le dérouleur de ruban correcteur
— Respect de la grammaire et de l'orthographe

Exercice 1

(*Banque PT, Maths B 2024*)

Dans cet exercice, l'espace euclidien $\mathbb{R}^2$ est muni de sa structure euclidienne usuelle et d'un repère orthonormé direct $(O; \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$.

On étudie la courbe Λ de représentation paramétrique $\begin{cases} x(t) = \sin^2(t) \\ y(t) = \dfrac{\sin^3(t)}{\cos(t)} \end{cases}$;

On note $M(t)$ le point de Λ de paramètre t pour $t \in \mathbb{R}$.

1. Justifier que l'on peut réduire l'intervalle d'étude de Λ à $I = \left[0; \dfrac{\pi}{2}\right[$. Préciser comment obtenir la courbe Λ en entier.
2. Déterminer les tableaux de variations des fonctions x et y sur I. Préciser les valeurs et/ou les limites au bord.
3. Quelle est la nature du point $M(0)$? Préciser la tangente en ce point.
4. Donner les coordonnées du point $M\left(\dfrac{\pi}{4}\right)$ ainsi que celles d'un vecteur directeur de la tangente à Λ en ce point.
5. Étudier la branche infinie lorsque t tend vers $\dfrac{\pi}{2}$.
6. Tracer la courbe Λ sur la feuille de papier millimétré fournie avec le sujet. On y fera apparaitre les éléments déterminés dans les questions précédentes. Unité : 8 cm

Exercice 2

(Banque PT, Maths B 2024)

Les deux parties de cet exercice sont indépendantes.

Partie I

L'objectif de cette partie est de déterminer toutes les matrices M de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ vérifiant $(\mathcal{E}_1)$: $M^2 - 2M = A$ où $A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 3 \\ 3 & -3 & 3 \\ 4 & -4 & 3 \end{pmatrix}$.

1. Résoudre les trois équations d'inconnue $x \in \mathbb{R}$,

$$(E_1) : x^2 - 2x = 0 \quad (E_2) : x^2 - 2x = -1$$

$$(E_3) : x^2 - 2x = 3$$

2. (a) Déterminer les valeurs propres de la matrice A.
   (b) La matrice A est-elle diagonalisable ?
   (c) Déterminer une matrice P inversible et une matrice D diagonale telles que $A = PDP^{-1}$.
   On classera les coefficients de la diagonale de D par ordre croissant.
3. Soit $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$
   On pose $\Delta = P^{-1}MP$ où P est la matrice déterminée dans la question 1 .
   (a) Démontrer que $M^2 - 2M = A \Leftrightarrow \Delta^2 - 2\Delta = D$.
   On suppose désormais que M est solution de $(\mathcal{E}_1)$.
   (b) Démontrer que $MA = AM$.
   (c) Soit X un vecteur propre de A associé à la valeur propre λ.
   Démontrer que le vecteur $Y = MX$ appartient au sous-espace propre de A associé à la valeur propre λ et en déduire que X est un vecteur propre de M.
   (d) En déduire que la matrice Δ est diagonale.
4. (a) Déterminer toutes les matrices diagonales Δ vérifiant $\Delta^2 - 2\Delta = D$.
   (b) En déduire toutes les matrices M vérifiant $M^2 - 2M = A$. On exprimera ces matrices M à l'aide de P et de matrices diagonales à préciser.

Partie II

Cette partie s'intéresse aux matrices M de $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ vérifiant $(\mathcal{E}_2) : M^2 - 2M = \alpha I$ où $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $\alpha \in \mathbb{C}$.

1. Démontrer que si $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ est solution de $(\mathcal{E}_2)$, il en est de même pour toute matrice semblable à M.
2. Soient M une solution de $(\mathcal{E}_2)$ et λ une valeur propre de M. Établir que $\lambda^2 - 2\lambda = \alpha$.
3. On note λ_1 et λ_2 les deux racines (éventuellement égales) de $\lambda^2 - 2\lambda = \alpha$.
   (a) Soit $\alpha = -1$. Démontrer que M est solution de $(\mathcal{E}_2)$ si et seulement si 1 est valeur propre double de M.
   (b) Soit $\alpha \neq -1$. Démontrer que si M est solution de $(\mathcal{E}_2)$ alors M est diagonalisable. Préciser les matrices diagonales D, semblables à M, possibles (à l'aide de λ_1 et λ_2).
   (c) Soit $\alpha \neq -1$. On suppose que M est semblable à l'une des matrices D données à la question précédente. Démontrer que M est solution de $(\mathcal{E}_2)$.
   (d) Pour $\alpha = 0$, donner une matrice M non diagonale solution de $(\mathcal{E}_2)$. On explicitera ses 4 coefficients.

Exercice 3

(Banque PT, Maths A 2024)

Pour tout entier naturel n, on note $\mathbb{R}_n[X]$ l'espace vectoriel des polynômes de degré inférieur ou égal à n.

Soit φ l'application définie sur $(\mathbb{R}_3[X])^2$ par :

$$\forall (P,Q) \in (\mathbb{R}_3[X])^2, \varphi(P,Q) = \sum_{k=0}^{3} P(k)Q(k)$$

On considère également les polynômes $L_p(X) = \prod_{\substack{k=0 \\ k\neq p}}^{3} \frac{X-k}{p-k}$ pour $p \in \{0;1;2;3\}$.

1. (a) Vérifier que $L_0(X) = -\frac{1}{6}(X-1)(X-2)(X-3)$.
   (b) Écrire de même $L_1(X), L_2(X)$ et $L_3(X)$.
   (c) Déterminer les valeurs de $L_p(k)$ pour tout $(p,k) \in [\![0;3]\!]^2$.
2. (a) Démontrer que φ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}_3[X]$.
   On notera $\|\ \|$ la norme associée.
   (b) Vérifier que (L_0, L_1, L_2, L_3) est une base orthonormée de $\mathbb{R}_3[X]$ pour ce produit scalaire.
   (c) Soit Q un polynôme de $\mathbb{R}_3[X]$. Exprimer en fonction de Q, les coordonnées de Q dans la base (L_0, L_1, L_2, L_3).
3. Déterminer une base orthonormée de $\mathbb{R}_1[X]$ pour le produit scalaire φ.

   On munit $\mathbb{R}^2$ de son produit scalaire usuel et d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

   On considère désormais 6 réels a, b, y_0, y_1, y_2 et y_3 et la droite $\mathcal{D}$ d'équation $y = ax + b$. Pour tout $p \in [\![0;3]\!]$, on note M_p le point de coordonnées (p, y_p), N_p le point de $\mathcal{D}$ dont l'abscisse est p et d_p la longueur du segment $[M_pN_p]$.

   On pose alors $\delta(a,b) = \sum_{p=0}^{3} d_p^2$.

   L'objectif est de déterminer les valeurs de a et b (si elles existent) pour lesquelles $\delta(a,b)$ est minimale.
4. Faire, sur la copie, un schéma qui illustre les données précédentes.
5. Vérifier que $\delta(a,b) = \sum_{p=0}^{3} (y_p - ap - b)^2$.
6. (a) Démontrer qu'il existe un unique polynôme Q de $\mathbb{R}_3[X]$ dont le graphe passe par les points M_0, M_1, M_2 et M_3.
   On pourra utiliser les polynômes L_p pour $p \in [\![0;3]\!]$.
   (b) Démontrer que $\delta(a,b) = \|Q - H\|^2$ où $H(X) = aX + b$.
   (c) En évoquant la distance d'un vecteur à un espace vectoriel bien choisi, en déduire l'existence d'un minimum pour δ et que celui-ci est atteint en un unique polynôme H_0. On précisera le lien entre Q et H_0.

   On pose $\overline{Y} = \sum_{p=0}^{3} y_p$ et $\overline{XY} = \sum_{p=0}^{3} p y_p$.
7. (a) Exprimer H_0 en fonction de φ, Q et les polynômes obtenus dans la question 3 .
   (b) Déterminer H_0 en fonction de $\overline{Y}$ et $\overline{XY}$.